

(6/4/23)

Teorema 6.4 (**‘Teoremi di Bolzano–Weierstrass’**) (i) Sia E un sottoinsieme limitato di \mathbb{R} con un numero infinito di elementi¹. Allora $\mathcal{D}E \neq \emptyset$.

(ii) Da ogni successione di numeri reali limitata è possibile estrarre una sottosuccessione convergente (ossia con limite in \mathbb{R}).

(iii) Da ogni successione di numeri reali è possibile estrarre una sottosuccessione regolare (ossia con limite in \mathbb{R}^*).

Questi enunciati sono una semplice conseguenza del seguente

Lemma Sia E un sottoinsieme limitato di \mathbb{R} con un numero infinito di elementi. Allora esiste una successione iniettiva in E convergente ad $\alpha \in \mathcal{D}E$.

Dimostrazione (del Lemma) Poiché E è limitato esistono due numeri $a < b$ tali che $E \subseteq [a, b]$. Sia $I_0 = [a, b] =: [a_0, b_0]$ e dividiamo in due tale intervallo: $I_0 = I \cup I'$ con $I = [a, c]$, $I' = [c, b]$ e $c = (a + b)/2$ il punto di mezzo di I_0 . Poiché $\#E = \infty$, o $\#I \cap E = \infty$ o $\#I' \cap E = \infty$ (se fossero entrambi finiti, la loro unione, che coincide con E , sarebbe finita contraddicendo l'ipotesi su E). Se $\#I \cap E = \infty$ poniamo $I_1 := I = [a, c] =: [a_1, b_1]$, se $\#I' \cap E < \infty$ poniamo $I_1 := I' = [c, b] =: [a_1, b_1]$. Chiaramente, in entrambi i casi, $a_0 \leq a_1 < b_1 \leq b_0$, $b_1 - a_1 = (b_0 - a_0)/2$ e $\#I_1 \cap E = \infty$. Ora, iteriamo la stessa costruzione con I_1 al posto di I_0 e così via. In tal modo otteniamo una sequenza di intervalli $I_k = [a_k, b_k]$ tali che, per ogni $k \geq 1$, si ha:

$$(a) \quad a_0 \leq \dots \leq a_{k-1} \leq a_k < b_k \leq b_{k-1} \leq \dots \leq b_0$$

$$(b) \quad b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k}$$

$$(c) \quad \#I_k \cap E = \infty.$$

Quindi, la successione $\{a_k\}$ è monotona crescente e limitata superiormente (da un qualunque b_j), mentre $\{b_k\}$ è monotona decrescente e limitata inferiormente (da un qualunque a_j). Dunque esistono (finiti) i limiti $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \alpha$ e $\lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = \beta$. Da (b) segue che

$$\beta - \alpha = \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k - a_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{b - a}{2^k} = 0,$$

e dunque $\alpha = \beta$. Ora, scegliamo una successione $\{x_k\}$ con $x_k \in E$ come segue: x_1 è un qualunque punto di $E_1 := I_1 \cap E \setminus \{\alpha\}$; x_2 è un qualunque punto di $E_2 := (I_2 \cap E) \setminus \{\alpha, x_1\}$, e, iterativamente, per $k \geq 2$, x_k è un qualunque punto di $E_k(I_k \cap E) \setminus \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$. Si noti che poiché I_k sono infiniti, lo sono anche E_k . Poiché $x_k \in I_k$ si ha che $a_k \leq x_k \leq b_k$ per ogni k e dal criterio del confronto segue che $\lim x_k = \alpha$. Infine, per costruzione $x_k \neq x_h$ per ogni $h \neq k$ e poiché $x_k \neq \alpha$, $\alpha \in \mathcal{D}E$. ■

Dimostrazione (del Teorema 6.4) (i) segue direttamente dal Lemma.

(ii) Sia $\{x_k\}$ una successione limitata di numeri reali e sia $E := \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ l'insieme dei suoi valori. Se $\#E < \infty$, allora uno dei suoi valori, diciamo \bar{x} viene assunto un numero infinito di volte da $\{x_k\}$, ossia, se $\mathcal{N} := \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = \bar{x}\}$, allora $\#\mathcal{N} = \infty$. Ordinando² \mathcal{N} otteniamo che $\mathcal{N} = \{n_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ con $n_j < n_{j+1}$: quindi la sottosuccessione $\{x_{n_j}\}$ è tale che $x_{n_j} = \bar{x}$ per ogni j (ed è quindi banalmente convergente).

Sia $\#E = \infty$. Per il Lemma esistono $y_k \in E$ tali che $y_k \neq y_h$ se $h \neq k$ e $y_k \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$. Ora, $y_k \in E$ significa che esiste $n_k \in \mathbb{N}$ tale che $y_k = x_{n_k}$. Chiaramente $n_k \rightarrow +\infty$, ma, in generale, $\{n_k\}$ non è strettamente crescente. Dal Lemma 6.3 segue, però, che esiste una sottosuccessione $\{n_{k_j}\}$ strettamente crescente e quindi la sottosuccessione $\{x_{n_{k_j}}\}$ soddisfa l'asserto.

(iii) Sia $\{x_k\}$ una successione di numeri reali. Se $\{x_k\}$ non è limitata, la tesi segue dal Lemma 6.3; se $\{x_k\}$ è limitata, la tesi segue da (ii). ■

¹Per la definizione di insieme finito, infinito e cardinalità di un insieme, si veda §1.4.4

²Si usi il principio del minimo: $n_1 = \min \mathcal{N}$, $n_2 = \min \mathcal{N} \setminus \{n_1\}$, $n_3 = \min \mathcal{N} \setminus \{n_1, n_2\}$, ...